

$$\tilde{p}(v) \cdot S_i'(v) = \sum_{\{w | \Phi_i(w) = v\}} \tilde{p}(w) \cdot S_i'(w) \quad \forall v \in \Omega_{t-1} \quad t=2, \dots, T-1$$

$$\tilde{p}(v) = (1+p) \sum_{\{w | \Phi_i(w) = v\}} (1+\tilde{p}(w))$$

$$\tilde{p}(v) \cdot S_i'(v) = \sum_{\{w | \Phi_i(w) = v\}} (1+\tilde{p}(w)) \cdot S_i'(w) \quad \forall v \in \Omega_T$$

$$\tilde{p}(w) = (1+p)^{-t} \cdot p(w) \quad \forall w \in \bigcup_{t=0}^{T-1} \Omega_t$$

$$(1+\tilde{p}(w)) = (1+p)^{-T} p(w) \quad \forall w \in \Omega_T$$

$$p(v) = \sum_{\{w | \Phi_i(w) = v\}} p(w) \quad \forall v \in \Omega_{t-1} \quad t=1, \dots, T-1$$

$$p(v) \cdot S_i'(v) = \sum_{\{w | \Phi_i(w) = v\}} \frac{S_i'(w) \cdot p(w)}{(1+p)} \quad \forall v \in \Omega_{t-1} \quad t=1, \dots, T-1$$

$$p(w) = 1$$

Средствие (Закон единой цены)

$\exists \xi_0(w), \xi_i(w) | i \in I, w \in \bigcup_{t=0}^{T-1} \Omega_t$ и

$\exists \eta_0(w), \eta_i(w) | i \in I, w \in \bigcup_{t=0}^{T-1} \Omega_t$ удовлетворяют условию сбалансированности.

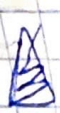
Если $\forall w \in \Omega_T$

$$(1+p) \xi_0(\Phi_T(w)) + \sum_{i \in I} S_i'(w) \xi_i(\Phi_T(w)) = (1+p) \eta_0(\Phi_T(w)) + \sum_{i \in I} S_i'(w) \eta_i(\Phi_T(w)),$$

то $\forall w \in \bigcup_{t=0}^{T-1} \Omega_t$

$$\xi_0(w) + \sum_{i \in I} S_i'(w) \xi_i(w) = \eta_0(w) + \sum_{i \in I} S_i'(w) \eta_i(w)$$

при условии, что функции $\{p, S_i'(w) | i \in I, w \in \bigcup_{t=0}^{T-1} \Omega_t\}$ безорбитрансны



$$\begin{aligned}
 & \gamma \in \Omega_{T-1} \\
 & \{w | \Phi_T(w) = \gamma\} = \Psi(\gamma) \\
 & (1+p) \sum_{\gamma} \gamma_0(\Phi_T(w)) + \sum_{i \in I} \gamma_i(w) \gamma_i(\Phi_T(w)) = \\
 & = (1+p) \gamma_0(\Phi_T(w)) + \sum_{i \in I} \gamma_i(w) \cdot \gamma_i(\Phi_T(w)) \\
 & (1+p) \sum_{\{w | \Phi_T(w) = \gamma\}} p(w) \cdot \gamma_0(\gamma) + \sum_{\{w | \Phi_T(w) = \gamma\}} p(w) \sum_{i \in I} \gamma_i(w) \gamma_i(\gamma) = \\
 & = (1+p) \sum_{\{w | \Phi_T(w) = \gamma\}} p(w) \gamma_0(\gamma) + \sum_{\{w | \Phi_T(w) = \gamma\}} p(w) \sum_{i \in I} \gamma_i(w) \gamma_i(\gamma) \\
 & (1+p) p(\gamma) \gamma_0(\gamma) + \sum_{i \in I} \left(\sum_{\{w | \Phi_T(w) = \gamma\}} \gamma_i(w) p(w) \right) \gamma_i(\gamma) \\
 & (1+p) p(\gamma) \gamma_0(\gamma) + \sum_{i \in I} \left(\sum_{\{w | \Phi_T(w) = \gamma\}} \gamma_i(w) p(w) \right) \gamma_i(\gamma) \\
 & \quad \quad \quad \parallel \\
 & \quad \quad \quad p(\gamma) \gamma_i(\gamma)
 \end{aligned}$$

$t \rightarrow t-1$

Консультация.

6) При каких значениях параметра в игре не будет равновесия по Нэшу?

(4, 6)	(1, 3)	(9, 7)
(5, 1)	(7, 0)	(2, 3)
(3, 2)	(4, 5)	(3, 4)



Игра в норм-и форме — совокупность объектов (мн-во игроков I , мн-во стр-и, ϕ -я выигрыша игроков).

$$I = \{N, \{X_i\}_{i \in N}, \{u_i(x_i, x_{-i})\}_{i \in N}\}$$

$$N = \{1, \dots, n\}$$

$$\forall i \in N \quad x_i \in X_i$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in X = X_1 \times \dots \times X_n$$

$$x_{-i} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in X_{-i} = X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \dots \times X_n$$

$$\bar{x} = (x_i, x_{-i})$$

Опр. Исход игры $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in X$ наз-ся равно-
весием по Нэшу, если

$$\forall i \in N \quad \forall x_i \in X_i \quad u_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq u_i(x_i, x_{-i}^*),$$

$$x_{-i}^* = (x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)$$

Биматр игра

Игра 2^{ух} игроков ($n=2$), в к-й у каждого игрока

$$X_1 = \{1, \dots, m\}, \quad X_2 = \{1, \dots, k\}$$

$$(a_{11}, b_{11}) \dots (a_{1k}, b_{1k})$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$(a_{m1}, b_{m1}) \dots (a_{mk}, b_{mk})$$

Равновесием по Нэшу м.б. только исход с
выигрышами (9, 7).

а < 3 ← ответ



Р-е модель Курно с 2^{ми} производителями, линейными ф-и издержек $c_1(x) = c_2(x) = x^2$ и обратной ф-й спроса $P(x) = 1 - x$. Чему равна цена в этой модели Курно? Какое зм-е примет цена, если произв-ва объединятся в монополию?

Обозначим объемов произв-ва 1^{ого} и 2^{ого} производителя через $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. Цена на рынке $1 - x_1 - x_2$. Ф-я выгоды (прибыли) j -го производителя:

$$\pi_j(x_1, x_2) = x_j P(x_1 + x_2) - c_j(x_j) = x_j(1 - x_1 - x_2) - x_j^2$$

Р-е по Нэшу в модели Курно:

Станд-я задача дополн-и:

$$\frac{\partial \pi_j(x_1, x_2)}{\partial x_j} \leq 0, \quad x_j \frac{\partial \pi_j(x_1, x_2)}{\partial x_j} = 0, \quad x_j \geq 0 \quad j = 1, 2$$

в модели Курно:

$$P(x_1 + x_2) + x_j \frac{\partial P(x_1 + x_2)}{\partial x_j} - \frac{\partial c_j(x_j)}{\partial x_j} \leq 0 \quad x_j \geq 0 \quad j = 1, 2$$

$$x_j \left(P(x_1 + x_2) + x_j \frac{\partial P(x_1 + x_2)}{\partial x_j} - \frac{\partial c_j(x_j)}{\partial x_j} \right) = 0 \quad j = 1, 2$$

Имеем:

$$1 - 2x_1 - x_2 - 2x_1 = 0$$

$$1 - x_1 - 2x_2 - 2x_2 = 0$$

В силу т-го 0! равн-я по Нэшу в модели Курно имеем: $x_1 = x_2$

$$\text{След-но: } x_1 = x_2 = \frac{1}{5}, \quad P(x_1 + x_2) = \frac{3}{5}$$

Ф-я издержек монополии:

$$C_M(x) = \min_{x_1, x_2} \{ c_1(x_1) + c_2(x_2) \mid x_1 + x_2 = x, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \}$$

$$C_M(x) = \frac{x^2}{2}$$

Ф-я выгоды монополии: $\pi P(x) - C_M(x)$

Объем произв-ва монополией x_m :

$$P(x_m) + x_m \frac{\partial P(x_m)}{\partial x} - \frac{\partial C_M(x_m)}{\partial x} \leq 0 \quad x_m \geq 0$$

$$x_m (P(x_m) + x_m \frac{\partial P(x_m)}{\partial x} - \frac{\partial C_M(x_m)}{\partial x}) = 0$$

Объем пр-ва в монополии:

$$1 - 2x_m - x_m = 0 \Rightarrow x_m = \frac{1}{3}, \quad P(x_m) = \frac{2}{3} > \frac{3}{5}$$

Ответ: $P_n = \frac{3}{5}, \quad P_m = \frac{2}{3}$

9) Ф-я модель чистого обмена с 2-мя видами товаров и 2-мя потребителями. Пусть начальное запасов 1-го потребителя $(1, 2)$, а ф-я полезности $u(x_1, x_2)$. Пусть нач-е запасов 2-го потребителя $(3, 4)$, а ф-я полезности $v(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Найти относительные равновесные цены на 1-й и 2-й товар. (по ф-е Коула-Дугласа).

1-й нач-е запасов $(w_1, w_2) > 0$, а ф-я полезности $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Задача о макс-м поведении потребителя:

$$u(x_1, x_2) \rightarrow \max$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq p_1 w_1 + p_2 w_2$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Об-м через $\lambda \geq 0$ множитель Лагранжа к бюджетному огр-ю и составили ф-ю Лагранжа.

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} + \lambda (p_1 w_1 + p_2 w_2 - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

По т-е Куна-Таккера:

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \alpha \frac{x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}}{x_1} = \lambda p_1$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow (1-\alpha) \frac{x_1^\alpha x_2^{-\alpha}}{x_2} = \lambda p_2$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 w_1 + p_2 w_2$$

Спрос потребителя на 1-й товар:

$$x_1(p_1, p_2) = \frac{p_1 w_1 + p_2 w_2}{p_1}$$

Спрос потребителя на 2-й товар:

$$x_2(p_1, p_2) = (1 - \alpha) \frac{p_1 w_1 + p_2 w_2}{p_2}$$

В 3-х вариантах спроса 1-го потреб-я:

$$x_1^1(p_1, p_2) = \frac{1}{3} \frac{(p_1 + 2p_2)}{p_1}, \quad x_2^1(p_1, p_2) = \frac{2}{3} \frac{(p_1 + 2p_2)}{p_2}$$

Ф-я спроса 2-го потреб-я:

$$x_1^2(p_1, p_2) = \frac{2}{3} \frac{(3p_1 + 4p_2)}{p_1}, \quad x_2^2(p_1, p_2) = \frac{1}{3} \frac{(3p_1 + 4p_2)}{p_2}$$

Рав-во спроса и предложения:

$$x_1^1(p_1, p_2) + x_1^2(p_1, p_2) = 1 + 3$$

$$x_2^1(p_1, p_2) + x_2^2(p_1, p_2) = 2 + 4 \Rightarrow 3p_1 + 6p_2 = 12p_1$$

Ответ: $\frac{p_1}{p_2} = 2$

11) Найти равновесие в смеш-х стр-х в матричной игре.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

у 1-го И: 2 стратегии (строки)
у 2-го И: 3 стратегии (столбцы)

А
Матр. игра: $a_{ij} + b_{ij} = 0$

Смеш. стр-и 1-го И: $X_1 = \{x = (x_1, \dots, x_m) \geq 0 \mid \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$

Смеш. стр-и 2-го И: $X_2 = \{y = (y_1, \dots, y_k) \geq 0 \mid \sum_{j=1}^k y_j = 1\}$

Ф-я выигрыша 1-го И: $u(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k a_{ij} x_i y_j$

Мар-й рез-т 1-го И: $\max_{x \in X_1} \min_{y \in X_2} u(x, y)$

Мар-й рез-т 2-го И: $\min_{y \in X_2} \max_{x \in X_1} u(x, y)$

Г-й р-т 1-го И: $V \rightarrow \max$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq V \quad j = \overline{1, k}$$

$$\sum_{i=1}^m \tilde{x}_i \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \tilde{x}_i \geq 1 \quad j = \overline{1, k}$$

Мар-и р-т 2^{го} уровня:

$u \rightarrow \min$

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \leq u \quad i = \overline{1, m}$$

$$\sum_{j=1}^k y_j = 1$$

$$y_j \geq 0 \quad j = \overline{1, k}$$

$$\sum_{j=1}^k \tilde{y}_j \rightarrow \max$$

$$\text{или} \quad \sum_{j=1}^k a_{ij} \tilde{y}_j \leq 1 \quad i = \overline{1, k}$$

$$\tilde{y}_j = \frac{y_j}{\text{val}}$$

$$\tilde{y}_j \geq 0 \quad j = \overline{1, k}$$

Взаимно гв-е ЗЛП:

$$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \rightarrow \min$$

$$\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 \geq 1$$

$$2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \geq 1 \quad (1)$$

$$5\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 \geq 1$$

$$\tilde{x}_1 \geq 0, \tilde{x}_2 \geq 0$$

$$\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 \rightarrow \max$$

$$\tilde{y}_1 + 2\tilde{y}_2 + 5\tilde{y}_3 \leq 1$$

$$2\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 - \tilde{y}_3 \leq 1 \quad (2)$$

$$\tilde{y}_1 \geq 0, \tilde{y}_2 \geq 0, \tilde{y}_3 \geq 0$$

ЗЛП (1):

Крайнее Т. линейного программирования:

$$\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 \geq 1$$

$$2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \geq 1$$

$$5\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 \geq 1$$

$$\tilde{x}_1 \geq 0, \tilde{x}_2 \geq 0$$

$$\textcircled{I} \quad \tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 = 1$$

$$\Rightarrow 2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = 1$$

$$\Rightarrow \tilde{x}_1 = \frac{1}{3}, \tilde{x}_2 = \frac{1}{3}, 5\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 > 1, \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = \frac{2}{3}, \tilde{x}_1 = \frac{1}{2}, \tilde{x}_2 = \frac{1}{2}$$

$\textcircled{II}$

$$2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = 1$$

$$5\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = 1$$

$$\Rightarrow \tilde{x}_1 = \frac{2}{7}, \tilde{x}_2 = \frac{3}{7}, \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = \frac{5}{7} > \frac{2}{3}$$

$\textcircled{III}$

$$\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 = 1$$

$$5\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = 1$$

$$\Rightarrow \tilde{x}_1 = \frac{3}{11}, \tilde{x}_2 = \frac{4}{11}, 2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = \frac{10}{11} < 1$$

3.17(2):

В силу гон-й мет-и.

$$\tilde{y}_3 = 0$$

$$\tilde{y}_1 + 2\tilde{y}_2 = 1 \Rightarrow \tilde{y}_1 = \frac{1}{3}, \tilde{y}_2 = \frac{1}{3}, \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = \frac{2}{3}$$

$$2\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = 1 \Rightarrow \tilde{y}_1 = \frac{1}{2}, \tilde{y}_2 = \frac{1}{2}, \tilde{y}_3 = 0$$

Ответ: есть ли стр-и 1^{10} и 2^{10} и:
 $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), y = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

(12)

Модель Кокса - Росса - Рубинштейна

$$t = \frac{3}{4}, r = \frac{5}{4}, u = \frac{7}{4}, T = 10, s(0) = 11$$

$$f(s) = (11 - s)$$

▲

Справедливая цена производного инструмента с платеж F в T и $f(s)$:

$$(1+r)^{-T} \sum_{m=0}^T C_m (p^*)^m (1-p^*)^{T-m} F / s^m \text{ и } S_1 / s_1$$

$$\text{где } p^* = \frac{u - 1 - r}{u - d}$$

$$\text{Вычислим } p^* = \frac{1}{2}$$

Справедливая цена опциона:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{10} \left(1 + \sum_{j=0}^{10} \frac{10!}{j!(10-j)!} \cdot 1 - \frac{3 \cdot 4^{10-j}}{1,10}\right)$$



(13)

Ф-я модель чистого обмена с n видами товаров и m потребителями. Обозначим через $w_j^i \geq 0$ нач-й запас j -го товара у i -го потребителя.] Ф-я полезности i -го потребителя ($i = \overline{1, m}$) имеет вид:

$$u_i(x_1, \dots, x_n) = A_i (x_1)^{\alpha_1^i} \dots (x_n)^{\alpha_n^i}$$

где $A_i \geq 0$, $\alpha_j^i \geq 0$, $\alpha_1^i + \dots + \alpha_n^i = 1$ $\begin{matrix} i = \overline{1, m} \\ j = \overline{1, n} \end{matrix}$

При каких усл-х $\exists$ конкурентное равновесие? какому уравнению удовлетворяют равновесные цены?

Задача о рац-м поведении потребителя.] нач-е запасов $(w_1, \dots, w_n) \geq 0$, а ф-я полезность $u(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $0 \leq \alpha_j$, $j = \overline{1, n}$, $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$

Задача о рац-м пов-и потребителя $u(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \max$

$$p_1 x_1 + \dots + p_n x_n \leq p_1 w_1 + \dots + p_n w_n$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

Об-м через $\lambda \geq 0$ ланго-в Лагранжа к бюджетному оп-ю и составили ф-ю Лагранжа:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} + \lambda (p_1 w_1 + \dots + p_n w_n - p_1 x_1 - \dots - p_n x_n)$$

По т-е Куна-Таккера:

$$\frac{\partial L(x_1, \dots, x_n, \lambda)}{\partial x_j} = 0 \Rightarrow \alpha_j \frac{x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}}{x_j} = \lambda p_j \quad j = \overline{1, n}$$

$$\frac{\partial L(x_1, \dots, x_n, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow p_1 x_1 + \dots + p_n x_n = p_1 w_1 + \dots + p_n w_n$$

Ф-и спроса потребителя

Спрос потребителя на j -й товар:

$$x_j(p_1, \dots, p_n) = d_j \frac{p_1 w_1^j + \dots + p_n w_n^j}{p_j}$$

В i -е ф-и спроса i -ого потребителя на j -й товар:

$$x_j^i(p_1, \dots, p_n) = d_j^i \frac{p_1 w_1^i + \dots + p_n w_n^i}{p_j}$$

Условие равновесия:
Рав-во спроса и пред-я на рынке j -го товара $j = \overline{1, n}$:

$$\sum_{i=1}^m x_j^i(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^m w_j^i$$

Откуда:

$$\sum_{i=1}^m d_j^i \frac{\sum_{k=1}^n p_k w_k^i}{p_j} = \sum_{i=1}^m w_j^i \quad j = \overline{1, n}$$

Ур-я на равновес. цены

Обозначим $\Omega_j = \sum_{i=1}^m w_j^i \quad j = \overline{1, n}$

$$a_{jk} = \frac{\sum_{i=1}^m d_j^i w_k^i}{\Omega_j} \quad j = \overline{1, n}, k = \overline{1, n}$$

Тогда: $\sum_{k=1}^n a_{jk} p_k = p_j \quad j = \overline{1, n}$

Ур-е на вектор равновес. цен

Обозначим $A = (a_{jk})_{j,k=\overline{1,n}}, \quad \Theta = (d_j^i)_{j=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}}, \quad W = (w_j^i)_{j=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}}$

$$\hat{A} = \Theta W^*, \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \vdots \\ \Omega_n \end{pmatrix}$$

Тогда: $A \geq 0, \quad Ap = p$

Заметим, что

$$\sum_{j=1}^n a_{jk} \Omega_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n d_j^i w_k^i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n d_j^i \right) w_k^i =$$

$$= \sum_{i=1}^n w_k^i = \Omega_k \quad k = \overline{1, n}$$

В вект-й записи: $A^* \Omega = \Omega \Rightarrow \lambda(A) = 1$
 Необходимое и дост-е усл-е $\exists$ равн-я:
 полнот-в вектора Φ -П. и-во A .

(14)

Значит 2 типа акций и цена бирже-
 нового актива постоянна, $|I|=2$,
 $T=2$, $\Omega_1 = \{w_1, w_2, w_3\}$, $p=0$, известны
 цены акций в нек-х с-х фин. рынка
 $S_1(w_0)=1$, $S_1(w_1)=2$, $S_1(w_2)=2$, $S_1(w_3)=0$,
 $S_2(w_1)=0$, $S_2(w_2)=1$, $S_2(w_3)=2$
 В каком диапазоне q -на макс-ся
 цена $S_2(w_0)$, чтобы фин-й рынок
 был безарбитражен? 42:10

А 1^я функ-я та форм-я цен фин. ~~рынка~~ ^{активов.}
 Для того, чтобы фонд. рынок $\{p, S_i(w) | i \in I, w \in \bigcup_{t=0}^T \Omega_t\}$
 был безарбитражен, необход и дост-е, чтобы
 $\exists$ такие $\{p(w) > 0 | w \in \bigcup_{t=0}^T \Omega_t\}$, что:
 $p(w_0) = 1$, $\sum_{w \in \Omega_{t-1}} p(w) = p(v)$ $v \in \Omega_{t-1}$ $t = \overline{1, T}$
 $S_i(v) = \sum_{w \in \Omega_{t-1}} \frac{S_i(w) p(w)}{(1+p) p(v)}$ $i \in I$ $v \in \Omega_{t-1}$ $t = \overline{1, T}$

Диапазон опр-ся из p -я задаче max и min
 функционала: $S_2(w_1)p_1 + S_2(w_2)p_2 + S_2(w_3)p_3 \rightarrow \max$

при ограничениях

$$S_1(w_1)p_1 + S_1(w_2)p_2 + S_1(w_3)p_3 = S_1(w_0)$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0$$

Т.о.,

$$p_2 + \frac{1}{2}p_3 \rightarrow \text{extr}$$

$$2p_2 + \frac{1}{2}p_3 = 1$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0$$

$$\text{Откуда: } p_2 = 2 - 4p_1 > 0, p_3 = 3p_1 - 1 > 0, p_1 \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

Лекция 15

$$t = 0, T$$

$$\Phi_t: \Omega_t \rightarrow \Omega_{t+1}$$

$$t = 1, T$$

$$\Omega_0 = \{\omega_0\}$$

$$(1+p), I = \text{рынок-е акции}$$

$$\{p, S_i(\omega) | i \in I, \omega \in \bigcup_{t=0}^T \Omega_t\} \text{ усл-е арбитража}$$

$$\{p(\omega) | \omega \in \bigcup_{t=0}^T \Omega_t\} \quad p(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \bigcup_{t=0}^T \Omega_t$$

Баланс:

$$\forall \gamma \in \Omega_t: p(\gamma) = \sum_{\{\omega | \Phi_{t+1}(\omega) = \gamma\}} p(\omega)$$

$$t = 0, T-1$$

$$S_i(\gamma) = \sum_{\{\omega | \Phi_{t+1}(\omega) = \gamma\}} \frac{S_i(\omega) \cdot p(\omega)}{(1+p) p(\gamma)}$$

Если мы рассм-и платит об-ва европ. типа, в соотв-и с к-ми обл-б вторич. ...

$$\{C(\omega) | \omega \in \Omega_T\}$$

Опр. Будем говорить, что платёжное обязательство $\{C(\omega) | \omega \in \Omega_T\}$ яв-я достижимым (реплицируемым), если $\exists$ такая извест. стратегия $\{\xi_0(\omega), \xi_i(\omega) | i \in I, \omega \in \bigcup_{t=0}^{T-1} \Omega_t\}$, удовлетворяющая условию самофинансирования, т.е. $\forall \omega \in \Omega_t, t = 1, T$ справедливо равенство:

$$(1+p) \xi_0(\Phi_t(\omega)) + \sum_{i \in I} S_i(\omega) \xi_i(\Phi_t(\omega)) = \xi_0(\omega) + \sum_{i \in I} S_i(\omega) \xi_i(\omega)$$

что $\forall \omega \in \Omega_T$:

$$(1+p) \xi_0(\Phi_T(\omega)) + \sum_{i \in I} S_i(\omega) \xi_i(\Phi_T(\omega)) = C(\omega)$$

пр Будем говорить, что инвестицион-
 ная стратегия $\{\xi_0(w), \xi_i(w) | i \in I, w \in \bigcup_{t=0}^{T-1} \Omega_t\}$
 удовлетворяющая условию самософинанси-
 рования является суперхеджирующей
 для облигации C (суперхедж), если $\forall w \in \Omega_T$
 стоимость портфеля
 $(1+p)\xi_0(\Phi_T(w)) + \sum_{i \in I} S_i(w) \xi_i(\Phi_T(w)) \geq C(w)$
 оценка сверху на ст-х платеж. обяз-ва
 $\xi_0(w_0) + \sum_{i \in I} S_i(w_0) \cdot \xi_i(w_0) \rightarrow \min$ {суперх.}
 $(1+p)\xi_0(\Phi_1^e(w)) + \sum_{i \in I} S_i(w) \cdot \xi_i(\Phi_1(w)) =$
 $= \xi_0(w) + \sum_{i \in I} S_i(w) \xi_i(w) \quad \forall w \in \Omega_+, \quad t=1, T-1$ (8)

оценка снизу
 $\xi_0(w_0) + \sum_{i \in I} S_i(w_0) \cdot \xi_i(w_0) \rightarrow \max$
 $(1+p)\xi_0(\Phi_1^e(w)) + \sum_{i \in I} S_i(w) \xi_i(\Phi_1(w)) = \xi_0(w) +$
 $+ \sum_{i \in I} S_i(w) \xi_i(w) \quad \forall w \in \Omega_+, \quad t=1, T-1$ (9)

$(1+p)\xi_0(\Phi_T(w)) + \sum_{i \in I} S_i(w) \xi_i(\Phi_T(w)) \leq C(w)$
 $\forall w \in \Omega_T$

дв. задача к (8):
 $\mathcal{L}(\{\xi_0(w), \xi_i(w) | i \in I, w \in \bigcup_{t=0}^{T-1} \Omega_t\}, \{\tilde{p}(w) | w \in \bigcup_{t=0}^{T-1} \Omega_t\}) \leq$
 $= \xi_0(w_0) + \sum_{i \in I} S_i(w_0) \cdot \xi_i(w_0) + \sum_{t=1}^{T-1} \tilde{p}(w)$
 $\tilde{p}(w) \{ \xi_0(w) + \sum_{i \in I} S_i(w) \xi_i(w) - (1+p)\xi_0(\Phi_t(w)) -$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i \in I} S_i(w) \xi_i(\Phi_t(w)) \} + \sum_{w \in \Omega_T} \tilde{p}(w) \{ C(w) - \\
& - (1+p) \xi_0(\Phi_T(w)) - \sum_{i \in I} S_i(w) \xi_i(\Phi_T(w)) \} = \\
& = \sum_{w \in \Omega_T} \tilde{p}(w) C(w) + \xi_0(w_0) \{ 1 - (1+p) \sum_{w \in \Omega_T} \tilde{p}(w) \} + \\
& + \sum_{i \in I} \xi_i(w_0) \{ S_i(w_0) - \sum_{w \in \Omega_T} \tilde{p}(w) \cdot S_i(w) \} + \\
& + \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{y \in \Omega_t} \{ \xi_0(y) (\tilde{p}(y) - \sum_{\{w | \Phi_{t+1}(w)=y\}} \tilde{p}(w)) + \sum_{i \in I} \xi_i(y) \cdot \\
& \cdot \{ \tilde{p}(y) \cdot S_i(y) - \sum_{\{w | \Phi_{t+1}(w)=y\}} \tilde{p}(w) \cdot S_i(w) \} \}
\end{aligned}$$

об.з. (8): (9)

$$\sum_{w \in \Omega_T} \tilde{p}(w) \cdot C(w) \rightarrow \max \quad (\min)$$

$$(1+p) \sum_{w \in \Omega} \tilde{p}(w) = 1$$

$$\forall y \in \Omega_t \quad t = \overline{1, T-1}$$

$$(1+p) \sum_{\{w | \Phi_{t+1}(w)=y\}} \tilde{p}(w) = p(y)$$

$$\forall i \in I \quad \sum_{w \in \Omega_t} \tilde{p}(w) \cdot S_i(w) = S_i(w_0)$$

$$\forall y \in \Omega_t \quad t = \overline{1, T-1} \quad \sum_{\{w | \Phi_{t+1}(w)=y\}} \tilde{p}(w) S_i(w) = \tilde{p}(y) S_i(y) \quad \forall w \in \Omega_T$$

$$\forall w \in \Omega_T \quad t = \overline{0, T}$$

$$\tilde{p}(w) = (1+p)^t p(w) \quad (8) \quad (9)$$

$$(1+p)^T \sum_{w \in \Omega_T} p(w) \cdot C(w) \rightarrow \max \quad (\min)$$

$$\forall y \in \Omega_t \quad t = \overline{0, T-1} \quad \text{barrier bar-c:}$$

$$p(y) = \sum_{\{w | \Phi_t(w)=y\}} p(w)$$

$$\forall i \in I \quad S_i(y) p(y) = \sum_{\{w | \Phi_{t+1}(w)=y\}} \frac{S_i(w) \cdot p(w)}{(1+p)}$$

$$p(w) \geq 0$$

(11)

$C_{\sup}$
 $C_{\inf}$

Предложение

Финансовый рынок $\{r, S_i(\omega) | \omega \in \bigcup_{t=0}^T \Omega_t\}$ безарбитражен. Для того, чтобы обращение на рынке платеж. обязательства $\{C(\omega) | \omega \in \Omega_+\}$ европейского типа не порождало арбитраж необходимо и достаточно, чтобы его цена C_0 в состоянии ω_0 в период времени $t=0$ удовлетворяло условию:

- i) если платежное обязательство не реплицируемо, то $C_0 \in (C_{inf}, C_{sup})$
- ii) если платежное обязательство реплицируемо, то $C_{inf} = C_{sup}$ и $C_0 = C_{inf}$

$$C_{sup} \geq C_0 \geq C_{inf}$$

Опр. Будем говорить, что безарбитражный рынок $\{r, S_i(\omega) | i \in I, \omega \in \bigcup_{t=0}^T \Omega_t\}$ явл-я полным, если $\forall$ платежное обяз-во европейского типа является реплицируемым

Вторая фундаментальная теорема форм-я цен финансовых активов

Для того, чтобы безарбитражный рынок $\{r, S_i(\omega) | i \in I, \omega \in \bigcup_{t=0}^T \Omega_t\}$ был полным необходимо и достаточно, чтобы $\exists!$ мартигальное раскр-е вероятностей $\{p_i, Q_i\}$ на $\mathcal{F}_T$ было совместно, но состояло из n элементов

2 (4 вопроса) 1 теор. вопрос
Зачет: 3 задания

17.12 go 24:00 загрузить

П5
21.12 : 9⁰⁰ - 411 - 416
14⁰⁰ - 417 - 419
27.12 : 9⁰⁰ в П6
29.12 : 9⁰⁰ в П6